Valore medio e valore efficace di una grandezza periodica

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Assegnata una grandezza fisica $y(t)$ periodica di periodo T, sussistono le seguenti definizioni:

Definizione 1 *Il **valor medio** di $y(t)$ è*

$$Y_m = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt \tag{1}$$

Definizione 2 *Il **valore efficace** di $y(t)$ è:*

$$Y_{eff} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)^2\,dt \tag{2}$$

Ciò premesso, sussiste il problema:

Problema 3

$$\exists y(t) \mid Y_m = Y_{eff} \quad ? \tag{3}$$

Il predetto problema, consiste nel ricercare tutte e sole le funzioni $y(t)$ tali che

$$\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y(t)^2\,dt} \tag{4}$$

o ciò che è lo stesso:

$$\int_0^T y(t)^2\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T y(t)\,dt\right)^2 \tag{5}$$

Da tale equazione vediamo che la funzione identicamente nulla risolve il problema posto, come anche una qualunque funzione costante. Per determinare eventuali altre soluzioni, impostiamo il problema nel formalismo dell'analisi funzionale. Precisamente, riferiamoci allo spazio vettoriale delle funzioni continue (e reali) in un intervallo $[a,b]$ quale sottoinsieme di $\mathbb{R}$:

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua in } [a,b]\} \tag{6}$$

Tale spazio può essere strutturato come spazio euclideo introducendo il prodotto scalare:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx, \quad \forall f,g \in C^1([a,b]), \tag{7}$$

da cui la norma euclidea:

$$||f|| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx} \tag{8}$$

La nostra richiesta è:

$$\exists f \in C^1([a,b]) \mid \int_a^b f(x)^2\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2, \tag{9}$$

che può essere riscritta in termini di prodotto scalare:

$$\exists f \in C^1([a,b]) \mid \langle f,f\rangle = \frac{1}{b-a}\langle f,1\rangle^2, \tag{10}$$

giacché

$$\int_a^b f(x)\,dx = \langle f, 1\rangle \tag{11}$$

A questo punto ricordiamo la disuguaglianza di Schwartz:

$$|\langle f, g\rangle| \leq ||f|| \cdot ||g||\,, \quad \forall f, g \in C^1([a, b]) \tag{12}$$

Per $g(x) = 1$ ed elevando al quadrato

$$\langle f, 1\rangle^2 \leq \langle f, f\rangle \langle 1, 1\rangle \tag{13}$$

Ma

$$\langle 1, 1\rangle = \int_a^b dx = b - a, \tag{14}$$

per cui

$$\langle f, 1\rangle^2 \leq (b - a)\langle f, f\rangle\,, \tag{15}$$

cioè proprio la nostra richiesta che come tale, altro non è che la disuguaglianza di Schwartz applicata agli elementi f ed 1. Ricordiamo che tale disuguaglianza è valida sotto il segno di $=$ se e solo se i vettori sono linearmente dipendenti. Per cui la nostra richiesta è verificata se e solo se $f(x)$ e 1 sono linearmente dipendenti i.e. proporzionali:

$$f(x) = c,$$

essendo c un'arbitraria costante reale. Ne consegue che le soluzioni del problema proposto sono tutte e sole le funzioni costanti in $[a, b]$. Tale insieme è manifestamente un sottospazio vettoriale di $C([a, b])$:

$$V([a, b]) = \{f \in C([a, b]) \mid f(x) = c\} \tag{16}$$

Segue

$$\langle f, 1\rangle^2 < (b - a)\langle f, f\rangle\,, \quad \forall f \in C([a, b]) - V([a, b]) \tag{17}$$

Ritornando alla questione iniziale, concludiamo che le grandezze fisiche per le quali il valor medio coincide con il valore efficace sono tutte e sole quelle costanti i.e. indipendenti dal tempo. Per una qualunque grandezza $y(t)$ non costante, riesce

$$Y_{eff} > Y_m \tag{18}$$