Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Teoria dei due gruppi di neutroni: veloci e lenti (termici)

I calcoli fin qui ottenuti su un solo gruppo di neutroni – gruppo ad una sola velocità o isoenergetico – sono approssimati perché le proprietà del materiale nel core sono molto differenti per i neutroni veloci e per i neutroni lenti. Effettivamente i guadagni da riflettore ricavati si riscontrano essere troppo bassi; vediamone le ragioni.

In primo luogo la causa risiede nella assunzione di trattare tutti i neutroni della stessa velocità, cioè isotermici; si è pertanto ignorato il fatto che neutroni veloci entranti nel riflettore hanno probabilità maggiore dei neutroni termici di essere dispersi entro il core proprio per le extra-collisioni che essi subiscono nella fase di rallentamento. Inoltre i neutroni, che entrano nel riflettore con energie sopra il livello di risonanza, sono moderati nel riflettore; questi allora possono ritornare nel core come neutroni termici, avendo completamente evitato la cattura per risonanza alla quale sarebbero stati sottoposti se fossero pervenuti a energie termiche nel core prima di entrare nel riflettore. Entrambi questi fattori tendono a crescere l'efficacia del riflettore. Conseguentemente, se allarghiamo il range di energia, cioè dalla fissione a quella termica, si hanno valori più alti del guadagno da riflettore. In secondo luogo l'approssimazione sta proprio nel supporre che i neutroni possano essere divisi in due gruppi: lenti e veloci.

Consideriamo, prima, il core di un reattore, in cui non ci sono catture di risonanza. Nella trattazione seguente si assumeranno l'indice 1 e 2 rispettivamente per i neutroni veloci e lenti.

Il range di energia per i neutroni veloci è $E_0, ..., E_{th}$; fuori di tale range i neutroni sono lenti.

La quantità di neutroni veloci prodotta da fissione è $k\Sigma_{2c}\Phi_{2c}$ dove Σ_{2c} è la sezione d'urto macroscopica di neutroni termici nel core; tale quatità può essere considerata la sorgente per neutroni veloci nell'equazione di diffusione del core. Nel regime stazionario questa equazione diventa:

$$D_{lc}\nabla^2\Phi_{lc} - \Sigma_{lc}\Phi_{lc} + k\Sigma_{2c}\Phi_{2c} = 0 \tag{1}$$

La q.tà di dispersioni (scattering) subita dal gruppo dei neutroni veloci è

$$\int_{E_{th}}^{E_0} \Sigma_s(E)\, n(E)\, vdE, \tag{2}$$

dove $n(E)$ è densità neutronica per unità di energia, mentre v è la velocità. Il flusso totale dei neutroni veloci è:

$$\Phi_1 = \int_{E_{th}}^{E_0} n(E)\, vdE \tag{3}$$

La sezione d'urto media di un gruppo neutronico è data da:

$$\bar{\Sigma}_s = \frac{\int_{E_{th}}^{E_0} \Sigma_s(E)\, n(E)\, vdE}{\int_{E_{th}}^{E_0} n(E)\, vdE} \tag{4}$$

Segue

$$\text{numero di collisioni } / \, \mathrm{cm}^3 \, \mathrm{s} = \bar{\Sigma}_s \Phi_1 \tag{5}$$

$$\text{numero di neutroni trasformati da lenti a veloci } / \, \mathrm{cm}^3 \, \mathrm{s} = \frac{\bar{\Sigma}_s \Phi_1}{\frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E_{th}}} = \Sigma_1 \Phi_1, \tag{6}$$

dove

$$\Sigma_1 = \frac{\bar{\Sigma}_s}{\frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E_{th}}} \tag{7}$$

è la sezione d'urto di rallentamento per neutroni veloci.

Il coefficiente di diffusione del gruppo veloce è derivato da considerazioni sulla densità di corrente, la quale può così essere rappresentata

$$\mathbf{J} = -\int_{E_{th}}^{E_0} D\left(E\right) \operatorname{grad} \Phi\left(r, E\right) dE \tag{8}$$

Quindi

$$\mathbf{J}_1 = -D_1 \operatorname{grad} \Phi_1 \tag{9}$$

dove

$$D_1 = \frac{\int_{E_{th}}^{E_0} D\left(E\right) \operatorname{grad} \Phi\left(r, E\right) dE}{\int_{E_{th}}^{E_0} \operatorname{grad} \Phi\left(r, E\right) dE} \tag{10}$$

Si può vedere da questa equazione che D_1 è costante solo se $\Phi\left(r, E\right)$ può esprimersi come prodotto di due funzioni indipendenti: una di $\mathbf{r}$ e l'altra di E. Ciò equivarrebbe a pensare che la variazione di flusso da punto a punto nel mezzo è trascurabile. È questa un'assunzione che spesso viene fatta per semplicità; quindi sostituendo $D\left(E\right)$ con $\lambda_{th}/3$ si può scrivere

$$D_1 = \frac{\int_{E_{th}}^{E_0} \frac{\lambda_{th}}{3} \operatorname{grad} \Phi\left(r, E\right) dE}{\int_{E_{th}}^{E_0} \operatorname{grad} \Phi\left(r, E\right) dE} \tag{11}$$

Posto $\Phi\left(E\right) = E^{-1}$ si ha

$$D_1 = \frac{\frac{1}{3} \int_{E_{th}}^{E_0} \lambda_1\left(E\right) \frac{dE}{E}}{\ln\left(E_0/E_{th}\right)} \tag{12}$$

Riprendendo l'equazione di diffusione per il gruppo veloce nel core

$$D_{lc} \nabla^2 \Phi_{lc} - \Sigma_{lc} \Phi_{lc} + k \Sigma_{2c} \Phi_{2c} = 0 \tag{13}$$

dove Σ_{lc} è una sezione d'urto di assorbimento fittizia, che è effettivamente una sezione d'urto di rallentamento, avente esattamente il significato scritto sopra.

$$\Sigma_{lc} \Phi_{lc} = \text{quantità di neutroni termici} / \, \mathrm{cm}^3 \, \mathrm{s} \tag{14}$$

Se c'è una piccola cattura di risonanza, si includerà nel calcolo di k la probabilità p di fuga dalla risonanza. Per i neutroni termici nel core scriveremo

$$D_{2c} \nabla^2 \Phi_{2c} - \Sigma_{2c} \Phi_{2c} + \Sigma_{lc} \Phi_{lc} = 0 \tag{15}$$

essendo $\Sigma_{lc}\Phi_{lc}$ il termine di sorgente. Nel riflettore, non essendo esso un mezzo moltiplicante, scriveremo un'equazione mancante della sorgente:

$$D_{lr}\nabla^2\Phi_{lr} - \Sigma_{lr}\Phi_{lr} = 0 \tag{16}$$

Per i neutroni lenti nel riflettore:

$$D_{2r}\nabla^2\Phi_{2r} - \Sigma_{2r}\Phi_{2r} + \Sigma_{lr}\Phi_{lr} = 0 \tag{17}$$

dove Σ_{2r} è la sezione d'urto d'assorbimento. Per i flussi valgono le solite condizioni al contorno: di simmetria, di continuità, ecc. Per semplicità supporremo che la distanza di extra-polazione sia la stessa per neutroni lenti e veloci. Le parti omogenee delle quattro equazioni differenziali (due in riflettore e core, ciascuna per neutroni lenti e veloci) sono equazioni d'onda, del tipo:

$$\nabla^2\Phi_{lc} + B^2\Phi_{lc} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2\Phi_{2c} + B^2\Phi_{2c} = 0 \tag{18}$$

Si noterà che la B^2 è la stessa per il gruppo termico e per quello veloce. Questo si dimostra ricavando dalla (15) Φ_{lc} in funzione di Φ_{2c} e ricavando dalla (13) Φ_{2c} in funzione di Φ_{lc}. Sostituendo in (13) e in (15) rispettivamente le espressioni di Φ_{2c} e Φ_{lc} si ottengono:

$$D_{2c}\nabla^2\Phi_{2c} - \Sigma_{2c}\Phi_{2c} + \Sigma_{lc}\Phi_{lc} = 0 \Longrightarrow \Phi_{lc} = \frac{-D_{2c}\nabla^2\Phi_{2c} + \Sigma_{2c}\Phi_{2c}}{\Sigma_{lc}}$$

$$D_{lc}\nabla^2\Phi_{lc} - \Sigma_{lc}\Phi_{lc} + k\Sigma_{2c}\Phi_{2c} = 0 \Longrightarrow \Phi_{2c} = \frac{-D_{lc}\nabla^2\Phi_{lc} + \Sigma_{lc}\Phi_{lc}}{k\Sigma_{2c}}$$

$$D_{lc}\nabla^2\left(\frac{-D_{2c}\nabla^2\Phi_{2c} + \Sigma_{2c}\Phi_{2c}}{\Sigma_{lc}}\right) - \Sigma_{lc}\Phi_{lc} + k\Sigma_{2c}\Phi_{2c} = 0$$
$$D_{2c}\nabla^2\left(\frac{-D_{lc}\nabla^2\Phi_{lc} + \Sigma_{lc}\Phi_{lc}}{k\Sigma_{2c}}\right) - \Sigma_{2c}\Phi_{2c} + \Sigma_{lc}\Phi_{lc} = 0$$

due equazioni del tipo

$$\begin{cases} -\frac{D_1D_2}{\Sigma_2}\nabla^4\Phi_1 + \left(\frac{D_2\Sigma_1}{\Sigma_2} + D_1\right)\nabla^2\Phi_1 + (k-1)\,\Sigma_1\Phi_1 = 0 \\ -\frac{D_1D_2}{\Sigma_1}\nabla^4\Phi_2 + \left(\frac{D_1\Sigma_2}{\Sigma_1} + D_2\right)\nabla^2\Phi_2 + (k-1)\,\Sigma_2\Phi_2 = 0 \end{cases}$$

Dividendo una per $-\frac{D_1D_2}{\Sigma_2}$ e l'altra per $-\frac{D_1D_2}{\Sigma_1}$

$$\begin{cases} \nabla^4\Phi_1 + \hat{B}^2\nabla^2\Phi_1 + \hat{C}^2\Phi_1 = 0 \\ \nabla^4\Phi_2 + \hat{B}^2\nabla^2\Phi_2 + \hat{C}^2\Phi_2 = 0 \end{cases} \tag{19}$$

dove

$$\hat{B}^2 = -\frac{D_1\Sigma_2 + D_2\Sigma_1}{D_1D_2}, \quad \hat{C}^2 = -\frac{(k-1)\,\Sigma_1\Sigma_2}{D_1D_2} \tag{20}$$

Posto

$$\nabla^2\Phi_1 = F_1, \quad \nabla^2\Phi_2 = F_2$$

le due equazioni omogenee sono

$$\begin{cases} \nabla^2F_1 + \hat{B}^2F_1 = 0 \\ \nabla^2F_2 + \hat{B}^2F_2 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

i due buckling sono uguali. Allora visto che

$$\nabla^2\Phi_{lc} = -B^2\Phi_{lc}, \quad \nabla^2\Phi_{2c} = -B^2\Phi_{2c} \tag{22}$$

sostituendo nelle (13) e (15)

$$\begin{cases} -\left(D_{lc}B^2 + \Sigma_{lc}\right)\Phi_{lc} + k\Sigma_{2c}\Phi_{2c} = 0 \\ \Sigma_{lc}\Phi_{lc} - \left(D_{2c}B^2 + \Sigma_{2c}\right)\Phi_{2c} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -\left(D_{lc}B^2 + \Sigma_{lc}\right) & k\Sigma_{2c} \\ \Sigma_{lc} & -\left(D_{2c}B^2 + \Sigma_{2c}\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{23}$$

si può scrivere l'equazione critica per il core di un reattore riflesso ipotizzando due gruppi di energia

$$\left(D_{lc}B^2 + \Sigma_{lc}\right)\left(D_{2c}B^2 + \Sigma_{2c}\right) - k\Sigma_{2c}\Sigma_{lc} = 0 \tag{24}$$

Dividendo per $\Sigma_{2c}\Sigma_{lc}$

$$\left(\frac{D_{lc}}{\Sigma_{lc}}B^2 + 1\right)\left(\frac{D_{2c}}{\Sigma_{2c}}B^2 + 1\right) = k \tag{25}$$

$$\left(1 + L_{lc}^2B^2\right)\left(1 + L_{2c}^2B^2\right) = k \tag{26}$$

e ricordando $L_{lc}^2 = \tau_c$ età di Fermi, otteniamo l'equazione critica per un reattore spoglio

$$\frac{k}{\left(1 + \tau_c^2B^2\right)\left(1 + L_{2c}^2B^2\right)} = 1 \tag{27}$$

che è una forma quadratica in B^2per risolvere la quale vi saranno due soluzioni da prendere in considerazione.