

Dear Prof. Chuanmiao,

Thank you very much for the attached files.

For now I answer the question of the Schrödinger equation, because the answer is quite complex.

Best regards

Marcello Colozzo

## 1 Introduzione

In meccanica quantistica non relativistica la nozione di *campo di forze* è identica a quella della meccanica classica. Se  $x \equiv (x, y, z)$  abbiamo la funzione vettoriale  $\mathbf{F}(t, x, \dot{x})$  dove  $\dot{x} \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , in particolare per forze conservative:  $\mathbf{F}(x) = -\nabla V(x)$ . Ciò che non compare è la seconda legge di Newton perché il principio di indeterminazione di Heisenberg distrugge il concetto di traiettoria. In seguito, però, parleremo di particella vincolata a muoversi lungo l'asse  $x$ . Ma ciò servirà solo perché i problemi tridimensionali che hanno una particolare simmetria si riducono a tre problemi unidimensionali.

## 2 Equazione di Schrödinger

Riscrivo l'equazione da te riportata:

$$i\hbar D_t w = \hat{H}(x) w, \quad \hat{H}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x), \quad x \equiv (x, y, z) \quad (1)$$

$\hat{H}(x)$  è la rappresentazione nella base delle coordinate (vedi più avanti) dell'operatore hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \quad \hat{p} \equiv (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z), \quad \hat{x} \equiv (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

per cui la funzione hamiltoniana (classica) è:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Abbiamo quindi un sistema meccanico conservativo, giacché  $H$  non dipende esplicitamente dal tempo. Diversamente:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + V(x, t)$$

Quantisticamente si scrive:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) + \hat{H}_1(t) \quad (2)$$

dove  $\hat{H}_1$  è il contributo ad  $H$  dell'interazione con un campo di forze dipendente dal tempo. Nel limite  $|\hat{H}_1| \ll |H|$ , anziché risolvere l'equazione di Schrödinger relativa all'hamiltoniano (2), si procede con tecniche perturbative. Ciò è fondamentale soprattutto riguardo all'interpretazione di Dyson sulle matrici stocastiche.

Prima di discutere le condizioni iniziali e sul bordo per la soluzione  $w(t, x)$ , dobbiamo riflettere sul suo significato fisico. Qui abbiamo una grandezza complessa  $w = u + iv$ , per cui dobbiamo prendere o la parte reale o il modulo. Schrödinger prese il modulo quadro  $|w(x, t)|^2 \stackrel{def}{=} \rho(x, t) =$  densità di carica elettrica della particella. Accadde nel 1924 e non erano ancora state scoperte le particelle neutre (il neutrone venne scoperto nel 1930). In particolare, Schrödinger cercava di ricostruire i livelli energetici dell'atomo di idrogeno stabiliti da Bohr nell'omonimo modello. L'atomo di idrogeno è costituito da un protone (nucleo) e un elettrone. Possiamo ritenere il protone «fermo» in

quanto la sua massa è circa 2000 volte quella dell'elettrone, per cui abbiamo il sistema quantistico costituito da un elettrone soggetto all'attrazione coulombiana del protone. Qualche anno prima, L. De Broglie (francese) paragonò l'atomo a una sorta di «cavità risonante» che come sappiamo, determina il fenomeno delle *onde stazionarie*. In tale cornice concettuale, gli elettroni non sono corpuscoli ma onde che essendo confinate in una regione limitata di spazio (l'atomo), si presentano come onde stazionarie e come tali non hanno proprietà di propagazione (ma è comunque un campo di oscillazione). È più semplice riflettere in una sola dimensione: secondo De Broglie a una qualunque particella libera (i.e. non soggetta a forze) che si muove lungo l'asse  $x$  possiamo associare un'onda piana monocromatica di numero d'onde  $k$  e frequenza angolare  $\omega$ :

$$w(t, x) = Ae^{i(kx - \omega t)}, \quad A = \text{constant} = \text{ampiezza}$$

(rammentiamo che  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda). Precisamente, se  $p = m\dot{x}$  è la quantità di moto (o impulso):

$$k = \frac{p}{\hbar}$$

La frequenza angolare è invece legata all'energia  $E$  della particella dalla famosa formula  $E = h\nu = 2\pi\hbar\nu = \hbar\omega$ . Quindi il moto unidimensionale di una particella libera equivale alla propagazione di un'onda piana monocromatica:

$$w(t, x) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \quad (3)$$

osservando poi che  $E = \frac{p^2}{2m}$ . La (3) risolve la (1) con  $H = \frac{p^2}{2m}$  che l'hamiltoniana classica. Per passare al corrispondente operatore (hermitiano) dobbiamo tener presente ciò che io chiamo il lato oscuro della QM ossia la rappresentazione nella base delle coordinate (nel gergo di Dirac) dell'operatore impulso:

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\psi\rangle \quad (4)$$

dove  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  è il ket di stato (non sto considerando l'evoluzione temporale, quindi  $|\psi\rangle$  è in un dato istante) $\implies \langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ . Solitamente la (4) si scrive

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx} \implies \hat{p}^2 = -\hbar^2\frac{d^2}{dx^2} \quad (5)$$

che giustifica la forma differenziale dell'operatore hamiltoniano.

Se invece la particella è soggetta a  $V(x)$  non si ha un'onda piana, ma comunque una soluzione della (1). In definitiva: **il moto di una particella equivale alla propagazione di un'onda.**

In realtà questo risultato era già noto ad Hamilton (800) ma egli non lo prese sul serio in quanto ai quei tempi non c'era ragione di considerare tale analogia. Incidentalmente, in meccanica analitica si può ricavare un'equazione di Schrödinger in cui compare una costante del tipo  $\hbar$  (con le dimensioni energia $\times$ tempo).

In sintesi: De Broglie fece l'ipotesi della particella-onda, e Schrödinger scrisse l'equazione. Infatti, nei trattati storici (Einstein) si parla di sistemi di De Broglie-Schrödinger. (C'è un terzo attore: David Bohm, ma di questo parleremo in seguito).

La domanda è: **Una particella quantistica è un'onda o un corpuscolo?**

Attualmente, la risposta è: **Nessuna delle due. Dipende dall'esperimento. A seconda della configurazione sperimentale, una particella si manifesta o come onda o come corpuscolo.**

È il famoso dualismo onda-corpuscolo, e in tal modo mi riferisco all'allegato su Dyson, in quanto egli si riferisce al dualismo cartesiano, anche se in un altro contesto. Ma probabilmente stiamo parlando della stessa cosa... Una descrizione matematica coerente trascende tale dualismo, descrivendo la particella attraverso una funzione d'onda  $w(t, x)$  che mentre per De Broglie-Schrödinger era un'onda di materia, per Max Born (uno dei fisici seguaci di Niels Bohr) era una cosiddetta *onda di probabilità*,

nel senso che  $\rho(t, x) = |w(t, x)|^2$  è la densità di probabilità di trovare la particella in  $[x, x + dx]$  al tempo  $t$ , per cui la  $w(t, x)$  deve essere normalizzata

$$\int_{\Omega} |w(t, x)|^2 dx = 1, \quad \forall t \quad (6)$$

Max Born giunse a tale bizzarra conclusione in seguito a un celebre esperimento mentale (*mitragliatrice di Born*). In fig. 1 riportiamo un brano tratto dal libro di fig. 2.

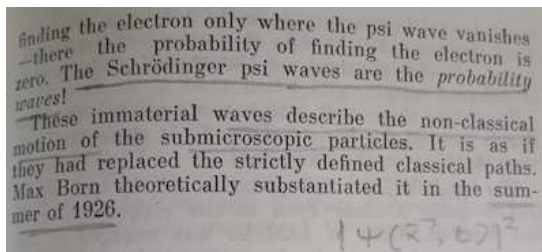


Figura 1: Onde di probabilità.

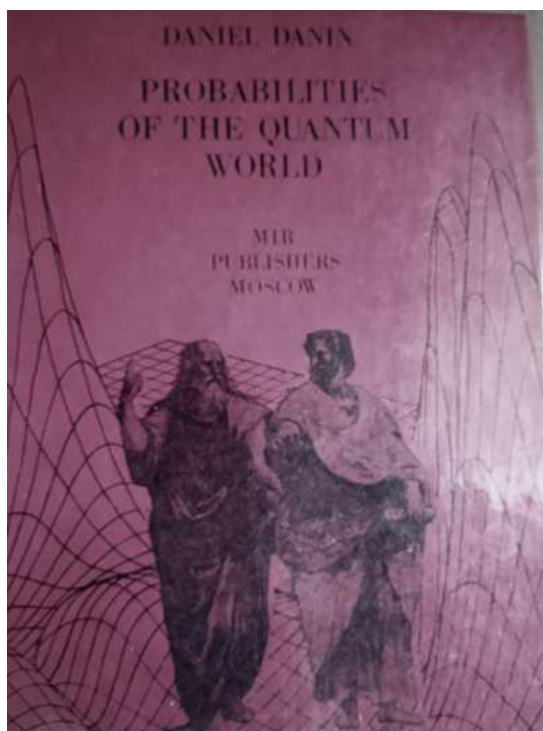


Figura 2: *Probabilities of the quantum world*. Ed. Mir (1983).

## 2.1 Separazione di variabili

Significa che stiamo cercando soluzioni del tipo onda stazionaria, e infatti tu enumeri le soluzioni con l'indice  $n$ . Le condizioni sul bordo sono appropriate, se  $S = \partial\Omega$  allora  $w|_S = 0$ , mentre la condizione iniziale è  $w(0, x) = w_0(x)$  cioè è assegnato il profilo iniziale dell'onda. La condizione sul bordo è corretta se  $V|_S = +\infty$  che idealizza una barriera di potenziale perfettamente riflettente. In questo modo le onde vengono riflesse avanti e indietro, producendo il fenomeno delle onde stazionarie. (Un pò come un motociclista ad alta velocità in una strada fiancheggiata da edifici sufficientemente alte: le onde sonore vengono ripetutamente riflesse dalle pareti degli edifici e interferendo, danno luogo alle onde stazionarie la cui intensità notevole fa scattare gli antifurti delle auto parcheggiate).

Dobbiamo poi tener conto della (6) e quindi dobbiamo considerare soluzioni di norma sommabile su  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} |w(t, x)|^2 dx < +\infty, \quad \forall t \quad (7)$$

cioè elementi dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ .

Per una migliore visualizzazione è preferibile lavorare in una dimensione. Ad esempio, consideriamo una particella confinata sul segmento  $[0, a]$ . Quindi

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in [0, a] \\ +\infty, & \text{if } x \notin [0, a] \end{cases}$$

che schematizza due barriere infinitamente alte poste in  $x = 0$  e in  $x = a$ . La particella sbatte avanti ed indietro... Quindi  $w(x, t)$  è del tipo onda stazionaria o più in generale una sovrapposizione lineare di tali onde (l'equazione di Schrödinger è lineare). Questa è la famosa sovrapposizione quantistica di cui tanto si parla, in particolare nel caso del gatto di Schrödinger. Ma i problemi ontologici non compaiono perché stiamo in ambito meccanica ondulatoria che è un mondo deterministico. I problemi interpretativi verranno dopo....

Cosa succede se abbattiamo le barriere, cioè se  $V(x) \equiv 0$ ? Ci ritroviamo con la particella libera e quindi con l'onda piana (3) che viola le condizioni sul bordo, nemmeno se mandiamo  $S$  all'infinito i.e.  $S = \partial\mathbb{R}^3$ , anzi la funzione d'onda non è normalizzabile (ma lo è su una delta di Dirac). Allora la condizione  $w|_S = 0$  è corretta se e solo se  $V|_S = +\infty$ . In tutti gli altri casi, la soluzione

$$w(t, x) = \sum_n g_n(t) \phi_n(x)$$

va completata aggiungendo un contributo di autofunzioni di uno spettro continuo. Lasciamo per un attimo in sospenso tale questione. Riprendiamo il tuo risultato che possiamo scrivere come:

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t) \phi_n(t),$$

dove

$$c_n(t) = c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda_n t}, \quad w_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^{(0)} \phi_n(t), \quad c_n^{(0)} = (\phi_n, w_0) = \int_{\Omega} w_0(y) \phi_n^*(y) dy$$

Cioè il profilo iniziale si esprime come combinazione lineare delle autofunzioni  $\phi_n(t)$ . Ciò corrobora la nota proprietà secondo cui le autofunzioni normalizzate di un operatore hermitiano costituiscono una base ortonormale nel corrispondente spazio di Hilbert. Aggiungendo l'ulteriore importante proprietà: gli autovalori sono reali. Da un punto di vista sperimentale, il profilo iniziale può essere configurato come

$$w_0(x) = \sum_{n=1}^N c_n^{(0)} \phi_n(t) \quad (8)$$

Si dice allora che il sistema è inizialmente preparato in una sovrapposizione lineare di autostati dell'energia (i.e. autofunzioni di  $\hat{H}$ )<sup>1</sup>. In simboli:

$$w_0(x) \xrightarrow{\text{time}} w(x, t) \quad (9)$$

Riguardo agli autovalori (reali)  $\lambda_n$ , vediamo che hanno le dimensioni di un'energia cioè del tipo  $\hbar\omega$ . E nel caso dell'elettrone dell'atomo di idrogeno, Schrödinger dimostrò attraverso quattro monumentali

<sup>1</sup>Ad esempio  $N = 2$  (si pensi al gatto di Schrödinger inizialmente preparato in una sovrapposizione quantistica dei due autostati «gatto vivo», «gatto morto» che sono mutuamente ortogonali nello spazio di Hilbert  $\mathbb{C}^2$ )

lavori che essi si identificano con i livelli energetici trovati da Bohr. Ora, una buona domanda è «nello stato (8) quale è l'energia dell'elettrone?». Questa domanda è un nonsense: l'energia non è definita<sup>2</sup>. E questa assurda risposta ha dato origine a una controversia non ancora terminata. Ha senso parlare di energia se e solo se l'elettrone è descritto da un'onda stazionaria cioè  $g_n(t)\phi_n(x)$  e la sua energia è l'autovalore  $\lambda_n$ . Nel frattempo ridefiniamo  $\lambda_n \equiv E_n$ . Quindi

$$c_n(t) = c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}, \quad \hat{H}\phi_n = E_n \phi_n \quad (10)$$

Esplicitando l'equazione agli autovalori:

$$\phi'' + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \phi = 0$$

Stiamo considerando il caso di autovalori discreti, per cui richiediamo le condizioni sul bordo  $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ , che forza l'autovalore  $E$  a distribuirsi in uno spettro discreto. Le altre soluzioni vanno scartate in quanto  $\phi|_{\partial\Omega} \neq 0$ .

Oltre all'atomo di idrogeno, sono stati risolti in maniera esatta altri sistemi quantistici come ad esempio, l'oscillatore armonico e la particella in un segmento (nel caso 3-dim, la particella è confinata in una scatola).

Domanda: gli autovalori dello spettro discreto possono coincidere con gli zeri di una qualche funzione speciale? La risposta è affermativa. Ad esempio, c'è il famoso Quantum bouncing ball ovvero la versione quantistica di una pallina da ping pong che rimbalza elasticamente sul pavimento. In condizioni ideali i.e. trascurando la resistenza dell'aria, se  $x$  è la quota della particella assumendo  $x = 0$  in corrispondenza del pavimento, la pallina è soggetta al suo peso  $mg$ , che è una forza conservativa di energia potenziale:

$$V(x) = \begin{cases} mgx, & \text{if } x \in (0, L] \\ +\infty, & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

in cui il pavimento è schematizzato da una barriera impenetrabile ( $V(0) = +\infty$ ) ma elasticamente riflettente.

$$\phi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - mgx) \phi(x) = 0$$

Siamo tentati ad eseguire un cambio di variabile

$$x = A\xi + B, \quad A, B > 0 \quad (\text{constant})$$

tale che

$$\phi''(\xi) - \xi\phi(\xi) = 0,$$

che è l'equazione di Airy. Eseguendo il predetto cambio di variabile per poi ripristinare la variabile  $x$ , otteniamo

$$\phi(x) = Ai\left(\frac{mgx - E}{mg}\beta\right), \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{1/3},$$

dove  $Ai$  denota la funzione di Airy, il cui andamento è riportato in fig. 3. Non deve spaventare il comportamento oscillante per  $x < 0$ , poiché a causa della barriera infinita di potenziale per  $x \rightarrow 0^+$ , dobbiamo imporre

$$\phi(x) = 0, \quad \forall x \in (-\infty, 0], \quad (12)$$

per cui la soluzione generale che ci interessa ha l'andamento riportato in fig. 4. Si noti che per  $x \rightarrow +\infty$ , la soluzione si annulla esponenzialmente.

---

<sup>2</sup>È esattamente come lo stato di vita/morte del gatto di Schrödinger.

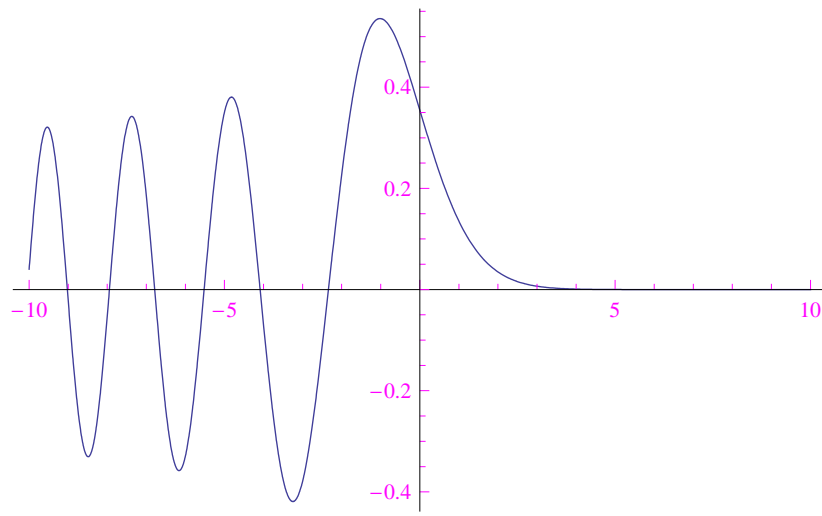


Figura 3: Grafico della funzione di Airy.

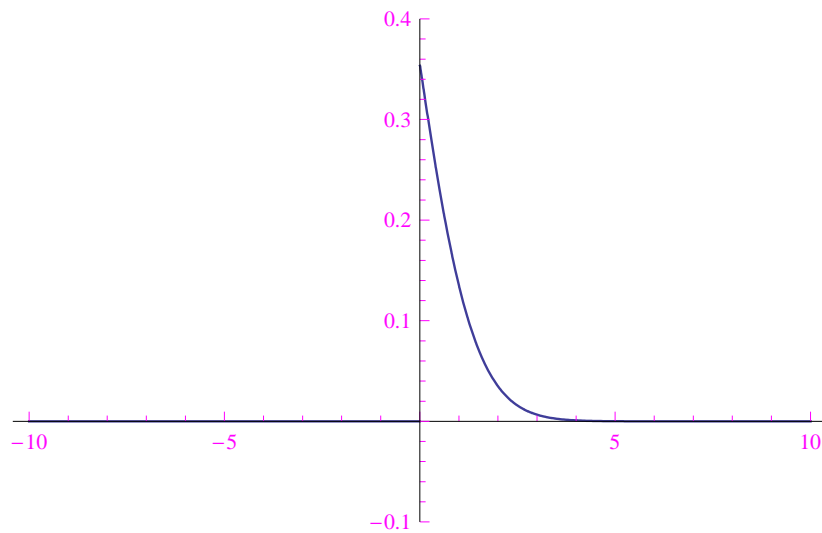


Figura 4: Andamento di una generica autofunzione dell'energia.

Per quanto precede, deve essere

$$\phi(0) = 0 \implies Ai\left(-\frac{E}{mg}\beta\right) = 0,$$

cioè l'argomento  $-\frac{E}{mg}\beta$  è uno zero della funzione di Airy. È noto che tale funzione ha un'infinità numerabile di zeri disposti sull'asse  $x$  negativo. Denotando con  $\xi_n < 0$  l' $n$ -esimo zero, si ottengono gli autovalori dell'energia

$$E_n = -B\xi_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

avendo definito la costante

$$B = \left(\frac{mg^2\hbar^2}{2}\right)^{1/3}$$

Le autofunzioni dell'energia sono

$$\phi_n(x) = \begin{cases} Ai\left(\frac{mgx+B\xi_n}{mg}\right), & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (14)$$

Ne consegue che le autofunzioni dell'energia conservano il profilo della funzione di Airy. Più precisamente, è l'argomento della funzione che è modulato dal corrispondente autovalore. Detto in altro modo, le predette autofunzioni sono definite a meno di una traslazione lungo l'asse  $x$ . Inoltre  $\{\phi_n(x)\}$  è un sistema ortogonale completo nello spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  associato alla particella. Riguardo alla normalizzazione, utilizzando qualche software di calcolo simbolico:

$$\int_0^{+\infty} Ai(\xi) d\xi = \frac{1}{3}, \quad (15)$$

per cui le autofunzioni normalizzate sono

$$\phi_n(x) = \begin{cases} N_n Ai\left(\frac{mgx+B\xi_n}{mg}\right), & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (16)$$

dove  $N_n$  sono delle costanti di normalizzazione calcolate tenendo conto del risultato (15). Abbiamo così ottenuto un sistema  $\{\phi_n(x)\}$  ortonormale completo. Per un'analisi qualitativa del problema, è preferibile lavorare su quantità adimensionali, per cui scriviamo

$$\phi_n(x) = \begin{cases} Ai(x - |\xi_n|), & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

La novità rispetto al caso classico, è che la pallina ha una probabilità finita (sia pur molto piccola) di superare la massima quota  $L$ . Ciò è una conseguenza del principio di indeterminazione di Heisenberg.

La soluzione trovata in questo problema ha validità generale, ossia è valida in un qualunque potenziale lineare del tipo:

$$V(x) = \begin{cases} W_0x, & \text{if } x \in (0, L] \\ +\infty, & \text{if } x < 0 \end{cases}, \quad W_0 > 0 \quad (18)$$

Ad esempio, un tale potenziale descrive l'interazione quark-antiquark nella formazione di uno stato legato noto come *quarkonio*.

## 2.2 Operatore di evoluzione temporale

In termini operatoriali la (9) si scrive:

$$w(x, t) = \hat{U}(t) w_0(x) \quad (19)$$

dove  $\hat{U}(t)$  è l'operatore di evoluzione temporale. È un operatore unitario quindi isometrico i.e. conserva la norma dei vettori su cui agisce. È importante perché la probabilità di trovare la particella in  $[x_0, x_0 + \Delta x]$

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |w(x, t)|^2 dx$$

deve essere indipendente da  $t$ . Dalle (1)-(19):

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t)}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}(t) \quad (20)$$

Integrando:

$$\hat{U}(t) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t') dt' \right] \quad (21)$$

Se  $\hat{H}$  non dipendente esplicitamente dal tempo:

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}} \quad (22)$$

che è esattamente ciò che tu hai scritto. La (21) è valida solo se  $\hat{H}$  commuta a tempi diversi, i.e.

$$\hat{H}(t') \hat{H}(t'') = \hat{H}(t'') \hat{H}(t'), \quad \forall t', t'' \in [0, t]$$

Altrimenti la soluzione formale è la serie di Dyson:

$$\hat{U}(t) = \hat{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \dots \hat{H}(t_n) \quad (23)$$

Guarda caso compare proprio il nome di Dyson... Non ho letto l'articolo di Dyson sulle matrici random e gli zeri della funzione zeta. Ma mi sono fatto comunque un'idea... In un qualunque problema di meccanica quantistica non relativistica, bisogna determinare autofunzioni e autovalori di  $\hat{H}$ . Nel caso del sistema quantistico di Dyson abbiamo il nucleo di un atomo pesante (erbio) che è bombardato da neutroni a bassa velocità, per cui siamo nel limite non relativistico. La domanda è: quale è lo spettro dei livelli energetici di un tale nucleo sottoposto a un massiccio bombardamento neutronico? Questa è una situazione simile a quella in cui si trovarono Bohr, Schrödinger etc. alle prese con i livelli energetici dell'elettrone dell'atomo di idrogeno. Qui abbiamo non elettroni, ma protoni e neutroni che sono appunto i costituenti del nucleo. Parliamo quindi di un nucleone giacché protone e neutrone sono stati di carica differenti di una stessa particella, quale appunto il nucleone. Il protone è più leggero del neutrone a causa di un effetto di natura elettromagnetica. Il sistema è dunque eccitato, cioè i singoli nucleoni vanno ad occupare livelli energetici più alti, grazie all'energia ricevuta dall'urto dei neutroni del fascio incidente. Secondo me è complicatissima l'hamiltoniana di un tale aggeggio e sicuramente Dyson è riuscito a tirarla fuori scrivendola in forma random perchè appunto tali sono gli urti. Quindi la (22) non va per niente bene... O magari  $U(t)$  è a sua volta random....



## 2.3 Caos deterministico

In meccanica classica sappiamo trattarlo. Si parla di dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, ed è richiesta l'ergodicità quale condizione necessaria. L'evoluzione dinamica è comunque deterministica ma imprevedibile. In meccanica quantistica ci aspettiamo qualcosa di simile per la funzione d'onda  $w(t, x)$  la cui evoluzione temporale esibisce una dipendenza sensibile dal profilo iniziale e dalle condizioni sul bordo.

C'è il biliardo di Berry (non ho studiato l'articolo sul comportamento asintotico degli autovalori)... Procediamo euristicamente a partire dal caso 1-dim. Qui ho una particella soggetta al potenziale:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in [0, a] \\ +\infty, & \text{if } x \notin [0, a] \end{cases} \quad (24)$$

Il problema agli autovalori si risolve facilmente:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & \text{if } x \in [0, a] \\ 0, & \text{if } x \notin [0, a] \end{cases}, \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, \dots, +\infty \quad (25)$$

Consideriamo il caso 2-dim. i.e. la scatola 2-dim:

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in [0, a] \times [0, b] \\ +\infty, & \text{if } x \notin [0, a] \times [0, b] \end{cases} \quad (26)$$

Qui abbiamo una simmetria rettangolare, per cui fattorizziamo  $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$  e risolvendo le corrispondenti equazioni si hanno soluzioni del tipo

$$X_{n_x}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{a}\right), & \text{if } x \in [0, a] \\ 0, & \text{if } x \notin [0, a] \end{cases}, \quad Y_{n_y}(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{b}\right), & \text{if } y \in [0, b] \\ 0, & \text{if } y \notin [0, b] \end{cases} \quad (27)$$

Quindi  $\phi_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$  con autovalori

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2), \quad n_x, n_y = 1, 2, \dots, +\infty$$

Compare il fenomeno della degenerazione dei livelli, i.e. esistono stati fisicamente distinti i.e. con distinti numeri quantici  $n_x, n_y$  con lo stesso autovalore. Ma questo non ci preoccupa... Questo sistema è manifestamente non caotico. Berry ha «deformato» il bordo della regione di confinamento della particella, passando dal rettangolo di lati  $a, b$  a un'ellisse di semiassi  $a, b$  per cui

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{if } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ +\infty, & \text{if } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1 \end{cases} \quad (28)$$

Il corrispondente sistema classico è caotico, e ci si aspetta una caoticità per l'evoluzione dinamica della funzione d'onda  $w(t, x, y)$ . Da quello che ho capito, Berry dice:

$$\exists \Omega > 0 \mid \alpha_n = \frac{E_n}{\hbar \Omega}, \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\alpha_n\right) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, +\infty$$

Qui  $n$  è – come si dice nel gergo dei fisici quantistici – un buon numero quantico. Ovviamente non può essere decomposto come  $n = n_x + n_y$  perché ora la simmetria rettangolare è distrutta.